

## PROSES BERPIKIR ALJABAR SISWA SMP DALAM MENYELESAIKAN MASALAH MATEMATIKA

Oleh:

Mifta Ismayanti<sup>1)</sup>, Masriyah<sup>2)</sup>, Siti Khabibah<sup>3)</sup>

<sup>1,2,3</sup>Pascasarjana, Universitas Negeri Surabaya

<sup>1</sup>mifta.17070785027@mhs.unesa.ac.id<sup>1</sup>

<sup>2</sup>masriyah@unesa.ac.id<sup>2</sup>

<sup>3</sup>sitikhhabibah@unesa.ac.id<sup>3</sup>

### Abstrak

Aljabar merupakan materi yang penting dalam pelajaran matematika maupun kehidupan sehari-hari. Penelitian tentang pengajaran dan pembelajaran aljabar dengan jelas menunjukkan perlu mempelajari perkembangan berpikir aljabar siswa dari waktu ke waktu. Berpikir aljabar adalah aktivitas mental untuk beroperasi pada pembentukan generalisasi dari pengetahuan dengan bilangan dan komputasi, memformalkan beragam gagasan dengan memakai sistem simbol yang bermakna dan mengeksplorasi konsep pola suatu fungsi seolah-olah sebagai kuantitas yang diketahui. A large number of researchers investigated the nature of algebraic thinking. Many of them focused on what individuals do and in what way their abilities for generalizing and using symbols develop". Proses penyelesaian masalah tidak selalu berjalan lancar sesuai keinginan. Siswa merasa kesulitan dalam menyelesaikan masalah terlalu sering, khususnya masalah matematika. Keadaan ini disebabkan perbedaan kemampuan dan daya juang menyelesaikan masalah yang dimiliki masing-masing individu. Tiap individu tersebut akan bertanya apakah ia akan menyerah atau menaklukkan kesulitan tersebut atau terus berjuang untuk mengatasi kesulitan tersebut. Setiap siswa memiliki kemampuan dalam mengatasi kesulitan yang berbeda-beda. Keadaan ini memberikan akibat yang berbeda ketika siswa menyelesaikan masalah matematika khususnya pada siswa sekolah menengah pertama. Dalam memecahkan masalah matematika, proses berpikir aljabar sangat penting untuk diketahui bagi pendidik agar dapat mengelola belajar dengan baik demi keberhasilan siswa, sehingga perlu dicari berpikir Aljabar siswa SMP ketika menyelesaikan masalah matematika.

**Kata Kunci:** Berpikir aljabar, kemampuan matematika, pemecahan masalah, pola bilangan

### 1. PENDAHULUAN

Penelitian tentang pengajaran dan pembelajaran aljabar dengan jelas menunjukkan perlu mempelajari perkembangan berpikir aljabar siswa dari waktu ke waktu (Kieran, 2007). NCTM (2000) juga menyarankan bahwa berpikir aljabar seharusnya dikembangkan di semua tingkat kelas. Misalnya Jones et. al (2000) secara eksplisit menyerukan penelitian masa depan untuk membangun model umum yang mencirikan pertumbuhan aljabar siswa dari waktu ke waktu. Dari beberapa penelitian tersebut dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa proses berpikir aljabar siswa penting untuk diketahui terutama pada tingkat sekolah.

Berpikir aljabar adalah aktivitas mental untuk beroperasi pada penstrukturan generalisasi dari pengetahuan pada bilangan serta komputasi, beragam gagasan diformalkan dengan memakai sistem simbol yang berarti dan mengeksplorasi konsep pola suatu fungsi seolah-olah sebagai kuantitas yang diketahui. Dengan kata lain berpikir aljabar adalah aktivitas mental siswa untuk menggunakan simbol dalam merepresentasikan situasi dan memecahkan masalah.

Dalam pembelajaran aljabar, siswa mulai diperkenalkan dengan kuantitas yang belum

diketahui. Sehingga dalam aljabar sering ditemui penggunaan simbol, bilangan, dan variabel untuk menyederhanakan kalimat menjadi model matematika ketika menyelesaikan suatu permasalahan. Kesulitan-kesulitan seperti penggunaan bahasa simbol inilah juga menjadi kendala bagi siswa tidak memahami dengan baik arti simbol-simbol yang terdapat dalam aljabar, salah satu contoh simbol " $=$ ". Misalnya, seperti penelitian yang dilakukan oleh Bert, dkk (Walle, 2008) pada soal berikut:  $8+4=\dots+5$ , siswa yang menjawab pertanyaan dengan benar ditemukan sebanyak 10% (7) pada titik-titik tersebut. Penggunaan bahasa simbol inilah yang sering dinilai sulit oleh siswa untuk dipelajari dibandingkan dengan aritmatika atau ilmu hitung walaupun menggunakan simbol angka namun lebih mudah untuk di pahami.

Beberapa penelitian menunjukkan bahwa siswa mampu menggeneralisasi relasi dan properti yang melekat pada operasi dan angka aritmatika, tanpa menggunakan simbol alfanumerik (Kieran, Pang, Schifter & Ng, 2016). Dari penemuan dan pendapat tersebut dapat diartikan bahwa materi aljabar menjadi permasalahan dalam matematika yang harus dipelajari dan dikembangkan.

Setiap siswa memiliki kemampuan untuk mengatasi kesulitan yang berbeda-beda. Keadaan ini

meninggalkan akibat yang berbeda ketika siswa menyelesaikan masalah matematika khususnya pada siswa sekolah menengah pertama. Siswa pada jenjang pendidikan dasar dan menengah diharapkan mampu menghadapi masalah-masalah yang ada dan mencapai hasil belajar yang optimal dalam menguasai konsep-konsep matematika sehingga terampil mengerjakan soal matematika dan untuk kepentingan belajar matematika lebih lanjut.

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan desain studi kasus. Studi kasus adalah strategi penyelidikan di mana peneliti mengeksplorasi secara mendalam suatu program, peristiwa, kegiatan, proses, atau satu atau lebih individu [9]. Kasus dalam penelitian ini adalah fenomena dua siswa SMP tentang berpikir aljabar dalam menyelesaikan masalah matematika. Penelitian ini dilaksanakan pada semester I tahun 2021/2022 di SMP BINA INSAN MANDIRI. Teknik purposive random sampling digunakan untuk memilih subjek dari 25 siswa kelas 9. Berdasarkan hasil tersebut diperoleh dua mata pelajaran yang masing-masing mewakili kategori kemampuan matematika tinggi dan kemampuan matematika rendah. Subyek diberikan tes guna mengetahui kemampuan berpikir aljabar kemudian dilakukan wawancara semi terstruktur untuk mengetahui kemampuan berpikir aljabar siswa. Tabel 1 menunjukkan indikator yang akan menjadi acuan di dalam penelitian ini.

Tabel 2.2 Indikator berpikir aljabar siswa SMP dalam menyelesaikan masalah matematika

Berpikir aljabar	Indikator	Kode
Generalisasi aritmatika ( <i>generalized arithmetic</i> )	Mengenal keteraturan dalam operasi	GA1
	Mengenal pola dan hubungan antar bilangan	GA2
Berpikir fungsional ( <i>functional thinking</i> )	Merepresentasikan persamaan, gambar, tabel fungsi dan grafik.	FT1
	Mengidentifikasi hubungan antar persamaan, variabel	FT2
Bahasa pemodelan ( <i>modeling languages</i> )	Menggunakan diagram atau bangun atau persamaan aljabar untuk memodelkan suatu masalah	ML1
	Mengevaluasi model mana yang lebih baik digunakan untuk mendeskripsikan keteraturan suatu pola	ML2
Pembuktian aljabar ( <i>algebraic proof</i> )	Mengecek kebenaran hasil dari penyelesaian masalah yang disajikan dan menghasilkan pembuktian jawaban yang benar	AP

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini menghasilkan fenomena bahwa siswa berkemampuan tinggi memenuhi semua langkah pemecahan masalah dan semua indikator berpikir aljabar. Siswa kemampuan matematika sedang mampu menerapkan semua langkah pemecahan masalah, namun hanya memenuhi indikator generalisasi aritmatika, berpikir fungsional, bahasa pemodelan dan pembuktian aljabar. Siswa kemampuan matematika rendah masih mengalami kesulitan untuk menerapkan keempat langkah

pemecahan masalah, dan hanya mampu memenuhi indikator generalisasi aritmatika, berpikir dinamik, berpikir analitik, dan pengorganisasian. Dengan demikian kemampuan berpikir aljabar siswa SMP signifikan berpengaruh pada penyelesaian permasalahan pola bilangan. Oleh sebab itu pendidik disarankan untuk lebih banyak memberi latihan untuk mengembangkan keterampilan berpikir aljabar siswa dalam memecahkan masalah pola bilangan.

### 3.1 Analisis Subjek Pertama

Subjek berkemampuan tinggi tidak memenuhi semua aspek berpikir aljabar. Aspek berpikir aljabar yang dipenuhi yaitu membuat generalisasi aritmatika, berpikir fungsional, membuat bahasa pemodelan, sedangkan pada aspek pembuktian aljabar tidak dapat dipenuhi. Pada aspek membuat generalisasi aritmatika, subjek berkemampuan tinggi mengenali keteraturan dalam operasi yang terdapat pada soal. Berkemampuan tinggi juga menjelaskan maksud kalimat dalam soal serta hubungan antar bilangan pada soal yang diketahui. Kemudian, berkemampuan tinggi membuat hubungan informasi dengan pengetahuan yang dimiliki dan terkait dengan masalah yang diberikan. Dia menghubungkan pengetahuan yang dimiliki sebelumnya dalam menafsirkan masalah yang diterimanya. Selanjutnya dari hubungan-hubungan yang diperoleh, dia memiliki gambaran masalah. Mengidentifikasi semua keterangan yang ada pada lembar soal dan mengenali keteraturan dalam operasi yang terdapat pada lembar soal.

Di dalam aspek berpikir fungsional, subjek berkemampuan tinggi merepresentasikan persamaan yang didapat pada soal dan membuat hubungan antar bagian-bagian yang tidak sama. Subjek berkemampuan tinggi mengidentifikasi hubungan antar persamaan yang didapat pada soal, yaitu hubungan antara banyak porsi dan jeda mengonsumsi menu tertentu. Dalam berpikir aljabar subjek berkemampuan tinggi aspek membuat bahasa pemodelan adalah sebagai berikut: Subjek berkemampuan tinggi merepresentasikan persamaan yang didapat pada soal dan untuk memodelkan suatu masalah. Selanjutnya berkemampuan tinggi mengidentifikasi kuantitas yang terlibat dan menggunakan operasi perkalian untuk membentuk suatu persamaan. Berkemampuan tinggi dapat mengevaluasi model mana yang lebih baik digunakan untuk mendeskripsikan suatu pola. Pada aspek pembuktian aljabar, subjek berkemampuan tinggi tidak mengecek kebenaran hasil akhir jawaban dan tidak dapat menunjukkan pembuktian jawaban yang benar. Subjek berkemampuan tinggi belum memenuhi indikator berpikir aljabar dalam melaksanakan pembuktian aljabar.

Gambar 1. Jawaban Subjek berkemampuan tinggi soal no.1 TPM 1

Kain Persegi  $\left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ cm} \rightarrow 4 \text{ kelopak} \cdot 8 \text{ dot} \\ 8 \text{ cm} \rightarrow 16 \text{ kelopak} \cdot 32 \text{ dot} \\ 12 \text{ cm} \rightarrow 36 \text{ kelopak} \cdot 72 \text{ dot} \end{array} \right.$

1 kelopak mendapat 2 dot  
akan terbentuk pola y utuk jika jumlah kelopak adalah kelipatan 4

1. dalam pola pada gambar.  
terdapat 7 kelopak setiap 2 cm.  
maka:  
 $1 \text{ cm} = 4 : 2 = 2 \times 2 = 4 \text{ kelopak}$   
 $8 \text{ cm} = 8 : 2 = 4 \times 2 = 16 \text{ kelopak}$   
dst ...

2.  $6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$   
 $600 : 2 = 300$   
kelopak bunga y terbentuk adl.  
 $= 300 \times 300$   
 $= 90.000 \text{ kelopak}$

3. Pola bunga y utuk.  
 $= 90000 : 4 = 22.500 \text{ pola bunga}$

4. dot y ada  
 $= 22.500 \times 2$   
 $= 45.000 \text{ dot putih}$

Gambar 2. Jawaban Subjek berkemampuan tinggi soal no.2 TPM 1

Obat A dim 60 hari.  
3 x sehari  $\rightarrow$  obat y terminum.  
 $48 \times 3 = 144 \text{ obat}$   
4 hari minum, 1 hari jeda.  $= 60 : 5 = 12$   
 $4 \times 12 = 48 \text{ hari minum}$   
 $1 \times 12 = 12 \text{ hari istirahat}$

Obat C. dim 60 hari  
1 x sehari } obat y terminum  
 $60 : 1 = 60 \text{ obat}$

Obat A = Rp. 30.000/btlr  $\cdot 30.000 \times 144 = 4.320.000$   
Obat B = Rp 80.000/btlr  $= 80.000 \times 120 = 9.600.000$   
Obat C = Rp 110.000/btlr  $= 110.000 \times 60 = 6.600.000$   
 $20.520.000$

Gambar 3. Jawaban Subjek berkemampuan tinggi soal no.1 TPM 2

Diket: kain batik.  
ukuran bunga dot  
3 cm ; 1 ; 12  
6 cm ; 4 ; 48  
9 cm ; 9 ; 108

Maka: Sisiap 1,5 cm panjang kain ada 4 kelopak per sisi.  
1 pola bunga ada 4 kelopak x 12 dot

Mentahan banyak pola bunga dan dot dim kain batik 3 m  
3 m = 300 cm  
Jml kelopak.  
 $(300 : 1,5)^2$   
 $= (200)^2$   
 $= 360.000 \text{ kelopak}$   
Jml pola bunga.  
 $= 360.000 : 4$   
 $= 90.000 \text{ pola bunga}$

Jml dot.  
 $30.000 \times 12$   
 $= 360.000 \text{ dot}$

Gambar 4. Jawaban Subjek berkemampuan tinggi soal no.2 TPM 2

2. Diket: Program Diet

Menu A = 4 x /hari (selelu 2 hari 1 belai); Rp. 40.000 / porsi  
Menu B = 3 x /hari ; Rp. 20.000 / porsi  
Menu C = 2 x /hari ; Rp. 15.000 / porsi

Berat badan Diana akan normal setelah menghabiskan 120 porsi Menu C (dg ketentuan Menu A & C yg memiliki 3000 kalori)

... jawaban ...

3.2 Analisis Subjek Kedua

Subjek berkemampuan rendah dalam membuat generalisasi aritmatika, Subjek berkemampuan rendah mengenali keteraturan dalam

operasi yang ada di dalam soal. Subjek mengetahui ukuran kain persegi dan jumlah kelopak dan dot pada setiap ukuran kain. Subjek berkemampuan rendah juga mengungkapkan bahwa setiap satu pola bunga ada 4 kelopak, dan setiap 2 cm ada 1 kelopak. Subjek berkemampuan rendah menjelaskan maksud kalimat dalam soal dengan mengungkapkan kembali menggunakan bahasanya sendiri, namun ketika ditanya apakah ada keteraturan/pola khusus subjek berkemampuan rendah mengatakan tidak ada

Subjek berkemampuan rendah dalam aspek berpikir fungsional, subjek berkemampuan rendah merepresentasikan persamaan yang didapat pada soal dan membuat keterkaitan antar elemen yang tidak sama dari soal untuk menjawab apa yang ditanyakan, dalam hal ini subjek menghubungkan informasi banyak kelopak dan rumus luas persegi. Subjek mengenali hubungan antar persamaan yang didapat pada soal, dalam hal ini menemukan hubungan antara banyak porsi dan jeda mengonsumsi menu tertentu. Subjek berkemampuan rendah merepresentasikan angka 48 sebagai banyak hari untuk meminum obat A, dan angka 3 untuk menunjukkan banyak mengonsumsi obat dalam sehari. Subjek dalam membuat bahasa pemodelan disimpulkan bahwa berpikir aljabar subjek berkemampuan rendah dalam membuat bahasa pemodelan adalah sebagai berikut: Merepresentasikan persamaan yang didapat pada soal dan untuk memodelkan suatu masalah, mengidentifikasi kuantitas yang terlibat dan menggunakan operasi perkalian untuk membentuk suatu persamaan, tidak mengevaluasi model mana yang lebih baik digunakan untuk mendeskripsikan suatu pola.

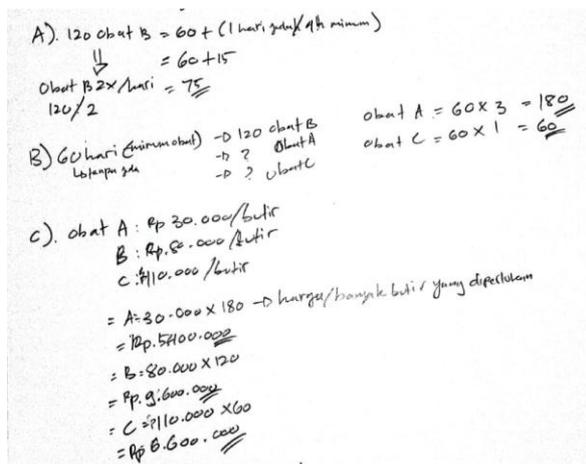
Subjek berkemampuan rendah dalam aspek pembuktian aljabar, Subjek melakukan kegiatan memeriksa kembali dan tanpa menuliskan bagaimana prosedur tersebut diperoleh di lembar jawaban, akan tetapi subjek berkemampuan rendah yakin atas jawaban tersebut. Dalam hal ini subjek berkemampuan rendah tidak dapat menunjukkan indikator pembuktian aljabar.

Gambar 5. Jawaban Subjek Berkemampuan Rendah soal no.1 TPM 1

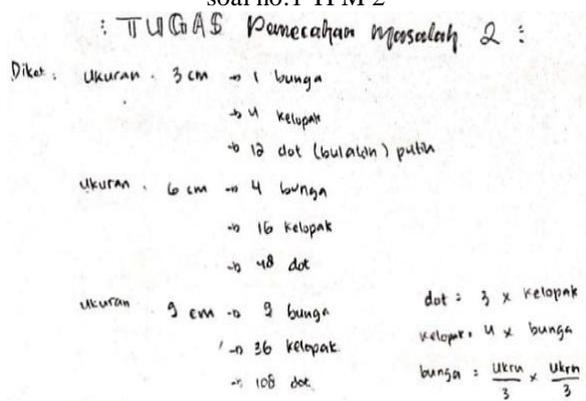
1. Bunga : 1, 4, 9  
kelopak : 4, 16, 36  
Dot (putih) : 8, 32, 72  
ukuran : 4 cm, 8, 12  
sisi : 6 m = 600 cm  
12 : 5 (10)

$50.000 \times 4 = 200.000$   
 $300 \times 300 = 90.000$   
 $22.500 \times 8 = 180.000$   
600

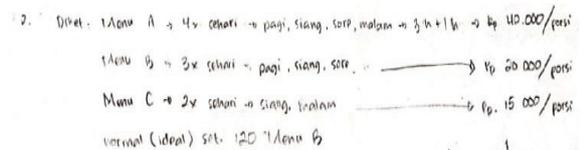
Gambar 6. Jawaban Subjek berkemampuan rendah soal no.2 TPM 1



Gambar 7. Jawaban Subjek berkemampuan rendah soal no.1 TPM 2



Gambar 8. Jawaban Subjek berkemampuan rendah soal no.2 TPM 2



Dari hasil penelitian di atas, kedua subjek memiliki persamaan. Mereka sama-sama mengidentifikasi tiap elemen dalam masalah dengan cara menyebutkan dan menuliskan semua elemen yang terdapat pada soal, baik yang diketahui ataupun yang ditanyakan serta menjelaskan maksud kalimat dalam soal serta hubungan antar bilangan pada soal yang diketahui. Pada aspek membuat pembuktian aljabar, subjek sama-sama tidak menjelaskan bagaimana prosedur tersebut diperoleh.

Siswa berkemampuan tinggi cenderung mengetahui dan menyajikan model matematis seperti persamaan maupun dengan pengetahuan yang dimiliki dan mengevaluasi hasil keputusan tersebut serta mengidentifikasi kuantitas yang terlibat, dalam hal ini siswa berkemampuan tinggi menggunakan luas persegi dan menggunakan operasi perkalian untuk membentuk persamaan, sehingga menemukan hasil yang diinginkan.

Siswa berkemampuan rendah tidak mengenali pola dan hubungan antar bilangan pada soal, dalam

hal ini subjek menemukan hubungan antara banyak porsi dan jeda mengonsumsi menu tertentu tertentu. Siswa berkemampuan rendah menjelaskan maksud kalimat dalam soal dengan mengungkapkan kembali menggunakan bahasanya sendiri. Namun ketika ditanya terkait apakah soal tersebut memiliki keteraturan tertentu, subjek menjawab tidak ada. Perbedaan proses berpikir aljabar antar kedua subjek dipaparkan pada tabel berikut.

Tabel 3. Perbedaan Berpikir Aljabar Subjek Berkemampuan Tinggi dan Subjek Berkemampuan Rendah

Aspek Berpikir Aljabar	Subjek Berkemampuan Tinggi	Subjek Berkemampuan Rendah
Generalisasi Aritmatika (Generalized Arithmetic)	Subjek Menggunakan pola yang ditemukan untuk menentukan susunan selanjutnya	Subjek tidak menjelaskan ada pola khusus.
Berpikir Fungsional (Functional Thinking)	Subjek dapat mengidentifikasi hubungan antar persamaan yang didapat pada soal, yaitu hubungan antara banyak porsi dan jeda mengonsumsi menu tertentu.	Subjek merepresentasikan persamaan yang didapat pada soal dan membuat hubungan antarelemen yang berbeda dari masalah untuk menjawab apa yang ditanyakan
Bahasa Pemodelan (Modeling Languages)	SCL dapat mengevaluasi model mana yang lebih baik digunakan untuk mendeskripsikan suatu pola	Merepresentasikan persamaan yang didapat pada soal dan untuk memodelkan suatu masalah.

## 5. KESIMPULAN

Hasil penelitian ini ditemukan beberapa persamaan dan perbedaan berpikir aljabar antara siswa berkemampuan tinggi dan siswa berkemampuan rendah ketika menyelesaikan masalah matematika.

Pada aspek membuat generalisasi aritmatika siswa berkemampuan tinggi dan siswa berkemampuan rendah memiliki persamaan. Mereka sama-sama mengidentifikasi informasi dalam masalah dengan menuliskan dan menyebutkan semua informasi yang ada pada soal baik yang diketahui ataupun yang ditanya serta menjelaskan maksud kalimat dalam soal serta hubungan antar bilangan pada soal yang diketahui.

Pada aspek membuat pembuktian aljabar, subjek sama-sama tidak menjelaskan bagaimana prosedur tersebut diperoleh. Siswa tidak menuliskan pemikiran dan ide-ide yang mendukung pembuktian dari kebenaran jawaban yang diperoleh.

Untuk itu, direkomendasikan kepada guru matematika agar lebih banyak memberikan latihan-latihan soal penyelesaian masalah matematika ketika proses kegiatan belajar mengajar berlangsung, yang berkaitan dengan kemampuan berpikir aljabar dengan tujuan agar pemahaman siswa lebih baik lagi.

Bagi peneliti lain yang akan meneliti tentang berpikir aljabar siswa agar penelitiannya lebih baik lagi, hendaknya melakukan wawancara yang lebih mendalam lagi, sehingga dapat memancing siswa

untuk mengungkapkan apa yang ada di dalam pikirannya sehingga memperoleh data yang lebih maksimal tentang berpikir aljabar siswa dalam menyelesaikan masalah.

## 6. REFERENSI

- Booker, G. (2009), Algebraic Thinking: generalising number and geometry to express patterns and properties succinctly in Martin, D., Fitzpatrick, T., Hunting, R., Itter, D., Lenard, C., Mills, T. & Milne, I (Eds) Mathematics of prime importance, Mathematical Association of Victoria, Brunswick Victoria.10-21
- Cai, J., B, Nie. (2011). Examining Students' Algebraic Thinking in a Curricular Context: A Longitudinal Study. USA: Springer. pp 161-184
- Eysenck, M.W. (1993). Principles of Cognitive Psychology. Trowbridge:Redwood Books.
- Kamol, N (2005). A Framework for Characterizing Lower Secondary School Student's Algebraic Thinking. Doctoral dissertation. Srinakharinwirot University.
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in The Early Grades:What is it? Universite Du Quebec A Montreal, Montreal, Quebec. The Mathematics Educator, Volume 8. Number 8. Page 139-151.
- Mac Gregor, M. and Stacey, K. (1993). Cognitive Models Underlying students' [5]formulation of simple equations. Journal for Research in Mathematics Education 24(3), 217-232.
- National Council of Teachers of Mathematics.(2000). Principles and Standards for Teaching Mathematics. Reston, VA: Author.
- Pantazi, D.P., Chimoni, M. &Christou, C. (2019). Different Types of Algebraic Thinking an Empirical Study Focussing on Middle School Students: International Journal of Science and Mathematics Education. Published Online. Doi: 10.1007/s10763-019- 10003-6
- Walle, V.D., William, B. JM., & Karp, KS. (2013). Mathematics Teaching Developmentally: Elementary And Middle School Mathematics, Eighth Edition. Boston: Pearson.
- Watson, A. (2009). Key Understanding in Mathematics Learning (Paper 6: Algebraic Reasoning). University of Oxford: Ingggris.