ISSN. 2621-9832
JURNAL MathEdu (Mathematic Education Journal)
http://journal.ipts.ac.id/index.php/MathEdu
Vol. 9 . No. 2 Juli 2026

DARI VISUALISASI KE VALIDASI: PENGEMBANGAN MODEL PROSES PEMBUKTIAN TANPA KATA DAN STRATEGI PEMBUKTIAN VISUAL MAHASISWA TENTANG TEOREMA PYTHAGORAS

Oleh :

Syaiful Hadi[1], Ahmad Fauzi[2]
[1,2]Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan, Universitas Islam Negeri Sayyid Ali Rahmatullah Tulungagung

Abstrak

Pembuktian merupakan aktivitas fundamental dalam matematika, namun banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam membangun pembuktian formal karena dominasi representasi simbolik yang abstrak. Salah satu pendekatan yang berpotensi menjembatani kesulitan tersebut adalah proof without words, yang memanfaatkan representasi visual untuk mendukung pembentukan argumen matematis. Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi tahapan proses pembuktian tanpa kata, mendeskripsikan strategi visual yang digunakan mahasiswa, serta mengembangkan model proses pembuktian tanpa kata. Penelitian menggunakan pendekatan kualitatif dengan desain studi kasus eksploratif yang melibatkan 30 mahasiswa pendidikan matematika. Data dikumpulkan melalui tes pembuktian Teorema Pythagoras, wawancara berbasis hasil tes, dan dokumentasi hasil pekerjaan mahasiswa. Analisis data dilakukan secara tematik dengan mengintegrasikan kerangka proses pembuktian Boero dan model kompetensi pembuktian Heinze dan Reiss. Hasil penelitian menunjukkan bahwa proses pembuktian tanpa kata terdiri atas lima tahapan utama, yaitu pemeriksaan gambar (visual inspection), identifikasi hipotesis (hypothesis recognition), pembenaran operasi (operation justification), konstruksi pembuktian (proof construction), dan validasi kesimpulan (validation). Selain itu, ditemukan tiga strategi utama, yaitu translasi visual ke aljabar, manipulasi geometri, dan rekonstruksi geometris. Temuan penelitian menghasilkan Model Proses Pembuktian Tanpa Kata yang menjelaskan bagaimana representasi visual digunakan untuk membangun dan memvalidasi argumen matematis.

Kata kunci— *pembuktian matematis, pembuktian tanpa kata, visualisasi matematis, proses pembuktian, Teorema Pythagoras*

Abstract

Proof is a fundamental activity in mathematics; however, many students experience difficulties in constructing formal proofs due to the dominance of abstract symbolic representations. One promising approach to addressing this challenge is proof without words (PWW), which utilizes visual representations to support the construction of mathematical arguments. This study aimed to identify the stages of the proof-without-words process, describe the visual strategies employed by students, and develop a process model of proof without words. A qualitative approach with an exploratory case study design was employed involving 30 undergraduate mathematics education students. Data were collected through a Pythagorean Theorem proof task, task-based interviews, and students' written work. The data were analyzed thematically by integrating Boero's proving process framework and Heinze and Reiss's proof competency model. The findings revealed that the proof-without-words process consists of five main stages: visual inspection, hypothesis recognition, operation justification, proof construction, and validation. Furthermore, three dominant strategies were identified: visual-to-algebraic translation, geometric manipulation, and geometric reconstruction. The study resulted in the development of a Proof Without Words Process Model that explains how visual representations are used to construct and validate mathematical arguments. These findings contribute to a deeper understanding of the cognitive processes underlying visual proof construction in mathematics.

Keywords— *mathematical proof, proof without words, mathematical visualization, proving process, Pythagorean theorem.*

ISSN. 2621-9832
JURNAL MathEdu (Mathematic Education Journal)
http://journal.ipts.ac.id/index.php/MathEdu
Vol. 9 . No. 2 Juli 2026

1. PENDAHULUAN

Pembuktian merupakan salah satu karakteristik esensial yang membedakan matematika dari disiplin ilmu lainnya. Melalui pembuktian, suatu pernyataan matematis tidak hanya dinyatakan benar, tetapi juga dijelaskan alasan logis yang mendasari kebenarannya. Oleh karena itu, pembuktian memiliki fungsi epistemologis sebagai sarana justifikasi pengetahuan matematis sekaligus fungsi pedagogis sebagai wahana pengembangan penalaran matematis tingkat tinggi. Aktivitas pembuktian menuntut kemampuan untuk membangun hubungan logis antar konsep, mengembangkan argumentasi yang koheren, serta melakukan validasi terhadap kesimpulan yang diperoleh (Hanna, 2020; Miller dkk., 2018). Dalam konteks pendidikan matematika modern, pembuktian tidak lagi dipandang hanya sebagai produk akhir berupa rangkaian deduksi formal, tetapi sebagai proses berpikir yang memungkinkan mahasiswa membangun pemahaman konseptual yang mendalam dan mengembangkan praktik matematis yang autentik (Stylianides dkk., 2024a).

Meskipun memiliki peran yang sangat penting, pembuktian merupakan salah satu topik yang paling menantang bagi mahasiswa. Berbagai penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa sering mengalami kesulitan dalam mengidentifikasi asumsi, membangun hubungan antara premis dan kesimpulan, memilih argumen yang relevan, serta menyusun rangkaian deduksi yang valid (Heinze & Reiss, 2004; İnam dkk., 2018). Kesulitan tersebut tidak hanya muncul pada mahasiswa yang baru mempelajari pembuktian formal, tetapi juga ditemukan pada mahasiswa tingkat lanjut yang telah menyelesaikan berbagai mata kuliah matematika. Penelitian terbaru menunjukkan bahwa banyak mahasiswa mampu mengikuti pembuktian yang disajikan dosen, namun mengalami kesulitan ketika harus membangun pembuktian secara mandiri karena kurang memahami struktur argumentasi yang mendasari bukti matematis (Häsä dkk., 2023; Kirsten & Greefrath, 2023).

Salah satu penyebab utama kesulitan tersebut adalah dominasi representasi formal dan simbolik dalam pembelajaran pembuktian. Dalam praktik perkuliahan matematika, pembuktian umumnya disajikan melalui manipulasi simbol dan bahasa matematis formal yang menuntut kemampuan abstraksi yang tinggi. Akibatnya, mahasiswa sering memandang pembuktian sebagai aktivitas prosedural yang berorientasi pada transformasi simbol, bukan sebagai proses membangun dan mengevaluasi argumen matematis yang bermakna. Kondisi ini menyebabkan terjadinya kesenjangan antara pemahaman intuitif mahasiswa dan struktur deduktif yang menjadi karakteristik utama pembuktian matematis (Alcock & Inglis, 2010; Mejía-Ramos & Inglis, 2009; Stylianides dkk., 2024a).

Dalam beberapa tahun terakhir, perhatian para peneliti pendidikan matematika mulai bergeser dari kajian mengenai hasil pembuktian menuju pemahaman yang lebih mendalam tentang proses pembuktian (*proof and proving*). Tinjauan sistematis yang dilakukan oleh (Stylianides dkk., 2024b) menunjukkan bahwa salah satu agenda utama penelitian kontemporer adalah memahami bagaimana mahasiswa membangun, mengorganisasi, dan memvalidasi argumen matematis selama proses pembuktian berlangsung. Pergeseran fokus ini menunjukkan bahwa memahami mekanisme berpikir selama proses pembuktian menjadi sama pentingnya dengan mengevaluasi kualitas bukti yang dihasilkan.

Salah satu pendekatan yang semakin banyak mendapat perhatian dalam konteks tersebut adalah *proof without words* atau pembuktian tanpa kata. Pendekatan ini menggunakan representasi visual berupa diagram, pola geometris, transformasi bangun, dan hubungan spasial untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan matematis tanpa bergantung pada uraian verbal yang panjang maupun manipulasi simbolik yang kompleks (Alsina & Nelsen, 2010). Melalui visualisasi, mahasiswa dapat mengamati hubungan matematis secara lebih langsung sehingga proses pembentukan konjektur dan argumentasi menjadi lebih mudah diakses (Cain, 2019). Selain berfungsi sebagai media representasi, visualisasi juga berperan sebagai alat epistemik yang memungkinkan mahasiswa membangun makna matematis, mengidentifikasi pola, dan mengembangkan justifikasi terhadap suatu kesimpulan (Arzarello dkk., 2012).

Penelitian terkini menunjukkan bahwa pembyuktian tanpa kata memiliki potensi besar dalam mendukung pengembangan kemampuan penalaran dan pembuktian matematis. (Dogan, 2022) menemukan bahwa representasi visual mampu membantu mahasiswa menghubungkan intuisi geometris dengan struktur formal pembuktian. Selain itu, penelitian mengenai desain ulang pembuktian tanpa kata menunjukkan bahwa representasi visual yang dirancang secara tepat dapat mendorong mahasiswa menghasilkan argumen yang lebih rinci dan lebih formal dibandingkan ketika mereka hanya berinteraksi dengan representasi simbolik (Marco dkk., 2022).

Meskipun demikian, sebagian besar penelitian sebelumnya masih berfokus pada efektivitas pembuktian tanpa kata sebagai media pembelajaran, peningkatan pemahaman konsep, atau kualitas bukti yang dihasilkan mahasiswa (Dogan, 2022; Hanna & De Villiers, 2021). Penelitian yang secara khusus mengkaji bagaimana mahasiswa membangun pembuktian melalui representasi visual masih relatif terbatas.

Khususnya, masih sedikit penelitian yang menjelaskan tahapan-tahapan kognitif yang dilalui mahasiswa ketika menginterpretasikan gambar, membangun hipotesis, memilih operasi matematis, menyusun argumen, dan memvalidasi kesimpulan dalam konteks pembuktian visual. Padahal, pemahaman terhadap proses tersebut sangat penting untuk menjelaskan bagaimana visualisasi berkontribusi terhadap pembentukan bukti matematis yang sah.

Keterbatasan tersebut menunjukkan adanya kesenjangan penelitian yang signifikan. Literatur yang ada telah banyak menjelaskan bahwa visualisasi dapat membantu pembuktian, tetapi belum menjelaskan secara memadai bagaimana proses pembuktian visual itu sendiri terbentuk. Dengan kata lain, pertanyaan mengenai mekanisme kognitif yang menghubungkan visualisasi dengan argumentasi matematis masih belum terjawab secara komprehensif. Oleh karena itu, diperlukan penelitian yang mampu mengungkap struktur proses pembuktian visual secara lebih rinci sehingga dapat memberikan kontribusi teoretis terhadap kajian bukti dan pembuktian.

Penelitian ini berupaya mengisi kesenjangan tersebut dengan mengkaji proses pembuktian mahasiswa ketika membuktikan Teorema Pythagoras menggunakan pendekatan pembuktian tanpa kata. Teorema Pythagoras dipilih karena merupakan salah satu teorema yang memiliki keragaman representasi visual yang sangat kaya dan telah lama digunakan sebagai konteks eksplorasi pembuktian geometris. Selain itu, teorema ini memungkinkan munculnya berbagai strategi argumentasi visual sehingga memberikan peluang yang luas untuk mengidentifikasi variasi proses pembuktian mahasiswa.

Secara teoretis, penelitian ini mengintegrasikan kerangka proses pembuktian yang dikembangkan oleh (Boero, 1990) dengan model kompetensi pembuktian (Heinze & Reiss, 2004) untuk mengidentifikasi tahapan-tahapan pembuktian yang muncul selama aktivitas pembuktian tanpa kata. Berbeda dengan penelitian terdahulu yang lebih berorientasi pada efektivitas media visual, penelitian ini berfokus pada pengembangan model proses pembuktian tanpa kata yang menjelaskan bagaimana representasi visual digunakan untuk membangun, mengembangkan, dan memvalidasi argumen matematis.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk: (1) mengidentifikasi tahapan proses pembuktian tanpa kata yang dilakukan mahasiswa dalam membuktikan Teorema Pythagoras, (2) mendeskripsikan strategi visual yang digunakan mahasiswa selama proses pembuktian, dan (3) mengembangkan model proses pembuktian tanpa kata yang menjelaskan hubungan antara visualisasi, argumentasi, dan validasi matematis.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan desain studi kasus eksploratif untuk mengungkap proses pembuktian tanpa kata yang dilakukan mahasiswa dalam membuktikan Teorema Pythagoras. Fokus penelitian adalah mengidentifikasi tahapan proses pembuktian, strategi visual yang digunakan, serta mengembangkan model proses pembuktian tanpa kata berdasarkan data empiris.

Partisipan penelitian terdiri atas 30 mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika yang telah menempuh mata kuliah Geometri dan memiliki pengalaman dalam pembelajaran pembuktian matematika. Seluruh partisipan menyelesaikan tes pembuktian Teorema Pythagoras berbasis pembuktian tanpa kata. Berdasarkan hasil pekerjaan yang diperoleh, mahasiswa dikelompokkan menurut karakteristik strategi pembuktian yang digunakan. Selanjutnya, enam mahasiswa dipilih secara purposif sebagai subjek utama penelitian, masing-masing dua mahasiswa yang mewakili strategi translasi visual ke aljabar, manipulasi geometri, dan rekonstruksi geometris. Pemilihan subjek didasarkan pada kelengkapan jawaban, kemampuan menjelaskan proses berpikir, dan representativitas strategi yang muncul.

Data dikumpulkan melalui tes pembuktian, wawancara berbasis tugas (task-based interview), dan dokumentasi hasil pekerjaan mahasiswa. Tes digunakan untuk mengidentifikasi pola penyelesaian dan strategi pembuktian, sedangkan wawancara dilakukan untuk menggali proses berpikir yang mendasari setiap langkah pembuktian. Instrumen penelitian berupa tes pembuktian tanpa kata teorema Pythagoras dan pedoman wawancara semi-terstruktur yang telah direview oleh dua ahli pendidikan matematika.

Analisis data dilakukan secara tematik dengan mengintegrasikan kerangka proses pembuktian (Boero, 1990) dan model kompetensi pembuktian (Heinze & Reiss, 2004). Tahapan analisis meliputi transkripsi data, pengodean terbuka, pengelompokan kategori, identifikasi tema, dan analisis lintas kasus untuk menemukan pola tahapan serta variasi strategi pembuktian. Berdasarkan pola yang muncul secara konsisten pada data tes, wawancara, dan dokumentasi, dikembangkan Model Proses Pembuktian Tanpa Kata yang menjelaskan hubungan antara visualisasi, argumentasi, dan validasi matematis.

Keabsahan data dijaga melalui triangulasi metode dan sumber dengan membandingkan data tes, wawancara, dan dokumentasi, serta membandingkan temuan antar subjek yang mewakili strategi pembuktian yang berbeda. Selain itu, proses analisis dilakukan secara berulang untuk memastikan konsistensi antara interpretasi peneliti dan data empiris yang diperoleh.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Hasil Penelitian

Analisis terhadap hasil pekerjaan tertulis, rekaman video, dan wawancara menunjukkan bahwa meskipun mahasiswa menggunakan representasi visual yang berbeda, terdapat pola proses yang relatif konsisten. Pola tersebut terdiri atas lima tahapan utama, yaitu: (1) pemeriksaan gambar (*visual inspection*), (2) identifikasi hipotesis (*hypothesis recognition*), (3) pembenaran operasi (*operation justification*), (4) konstruksi pembuktian (*proof construction*), dan (5) validasi kesimpulan (*validation*). Selain itu, ditemukan tiga strategi utama yang digunakan mahasiswa dalam membangun pembuktian visual, yaitu: (1) translasi visual ke aljabar, (2) manipulasi geometri, dan (3) rekonstruksi geometris.

Pemeriksaan Gambar

Tahap pertama ditandai dengan aktivitas mengamati dan mengidentifikasi elemen-elemen visual yang terdapat pada gambar. Pada tahap ini mahasiswa berusaha memahami struktur geometris yang tersedia sebelum menentukan hubungan matematis yang akan dibuktikan. Analisis hasil tes pembuktian tanpa kata menunjukkan bahwa seluruh subjek mengawali proses pembuktian dengan memperhatikan susunan bangun, hubungan antar sisi, dan kemungkinan pembagian area yang dapat dilakukan. Aktivitas ini sesuai dengan tahap *problem exploration* pada model Heinze dan Reiss serta tahap *production of conjecture* pada model Boero.

Sebagai contoh,subyek S2 mengamati bahwa gambar dapat direpresentasikan sebagai sebuah trapesium yang tersusun atas beberapa segitiga siku-siku.

Peneliti: Apa yang pertama kali kamu perhatikan ketika melihat gambar tersebut?

S2: Saya melihat ada beberapa segitiga yang bisa digabung menjadi satu bangun yang lebih besar. Dari situ saya berpikir luasnya mungkin bisa digunakan untuk membuktikan hubungan sisi-sisinya.

Cuplikan wawancara tersebut menunjukkan bahwa proses pembuktian diawali dengan eksplorasi visual terhadap struktur gambar sebelum mahasiswa membangun dugaan matematis.

Identifikasi Hipotesis

Setelah memahami struktur gambar, mahasiswa mulai menghubungkan elemen visual dengan hubungan matematis yang akan dibuktikan. Seluruh subjek mampu mengidentifikasi bahwa tujuan akhir pembuktian adalah menunjukkan hubungan antara sisi-sisi segitiga siku-siku.

Pada tahap ini mahasiswa mulai membentuk dugaan dan menghubungkan informasi visual dengan konsep matematis yang telah dimiliki sebelumnya.

Peneliti: Kapan Anda menyadari bahwa gambar tersebut berkaitan dengan Teorema Pythagoras?

S6: Setelah melihat ada sisi a, b, dan c. Saya langsung berpikir bahwa tujuan akhirnya pasti menunjukkan hubungan ketiga sisi itu.

Tahap ini menunjukkan munculnya hipotesis yang menjadi dasar bagi pemilihan strategi pembuktian.

Pembenaran Operasi

Tahap berikutnya adalah menentukan operasi yang dianggap mampu menghubungkan gambar dengan hipotesis yang akan dibuktikan. Pada tahap ini mahasiswa mulai memilih strategi visual yang akan digunakan. Analisis lintas kasus menunjukkan adanya tiga strategi yang berbeda, yaitu translasi visual ke aljabar, manipulasi geometri, dan rekonstruksi geometris.

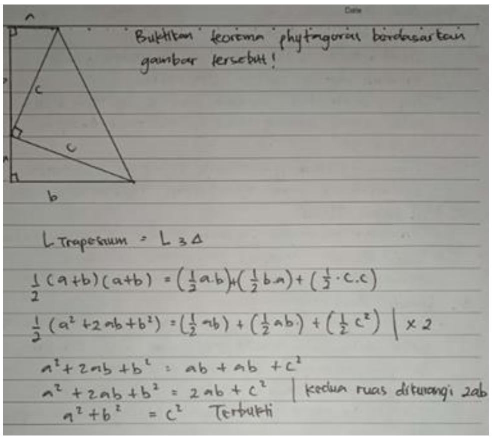
Perbedaan strategi tersebut menunjukkan bahwa meskipun tujuan pembuktian sama, mahasiswa membangun argumen matematis melalui jalur visual yang berbeda.

Translasi Visual ke Aljabar

Strategi translasi visual ke aljabar merupakan strategi yang paling banyak digunakan oleh mahasiswa. Strategi ini ditemukan pada subjek S2, S3, dan S5. Karakteristik utama strategi ini adalah penggunaan representasi visual sebagai titik awal untuk menghasilkan hubungan simbolik yang kemudian digunakan sebagai dasar pembuktian. Pada kategori ini, gambar tidak dipandang sebagai bukti yang lengkap, melainkan sebagai sarana untuk membangun ekspresi aljabar yang dianggap lebih formal dan meyakinkan.

Analisis hasil pekerjaan menunjukkan bahwa S2 memulai pembuktian dengan mengamati struktur visual yang tersusun atas beberapa segitiga siku-siku yang membentuk sebuah trapesium. Setelah memahami susunan bangun tersebut, S2 tidak langsung menarik kesimpulan mengenai hubungan sisi-sisi segitiga, tetapi terlebih dahulu mengidentifikasi kemungkinan penggunaan konsep luas.

ISSN. 2621-9832
JURNAL MathEdu (Mathematic Education Journal)
http://journal.ipts.ac.id/index.php/MathEdu
Vol. 9 . No. 2 Juli 2026



Gambar 2. Hasil Pekerjaan S2

Pada Gambar 2 terlihat bahwa S2 menghitung luas trapesium menggunakan dua pendekatan yang berbeda. Pendekatan pertama dilakukan dengan menggunakan rumus luas trapesium, sedangkan pendekatan kedua dilakukan dengan menjumlahkan luas bangun-bangun penyusunnya. Kesetaraan kedua hasil perhitungan tersebut kemudian diterjemahkan ke dalam bentuk persamaan aljabar yang menghasilkan hubungan antara a^2, b^2, dan c^2. Temuan ini diperkuat oleh hasil wawancara berikut.
Peneliti: Mengapa Anda memilih menghitung luas trapesium dengan dua cara?
S2: Karena saya melihat semua bagian di dalam gambar memiliki ukuran yang bisa dihitung. Kalau luas totalnya sama, berarti bisa dibuat persamaan.
Peneliti: Mengapa persamaan itu penting?
S2: Karena dari persamaan itu saya bisa menunjukkan hubungan antara sisi-sisinya secara matematis.

Cuplikan wawancara tersebut menunjukkan bahwa visualisasi berfungsi sebagai sarana menghasilkan relasi simbolik. Mahasiswa belum menganggap gambar sebagai argumen pembuktian yang berdiri sendiri.

Pola yang serupa juga ditemukan pada S3 dan S5. Kedua subjek menggunakan pendekatan visual untuk memperoleh ekspresi matematis yang selanjutnya dimanipulasi secara aljabar hingga menghasilkan bentuk akhir Teorema Pythagoras.

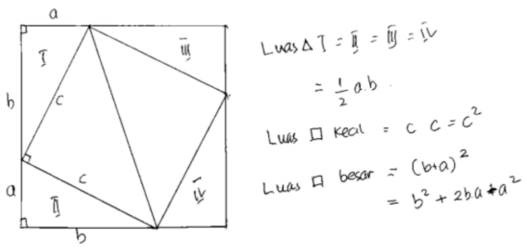
Secara kognitif, strategi ini menunjukkan adanya perpindahan representasi dari register visual menuju register simbolik. Mahasiswa memanfaatkan informasi visual sebagai sumber data awal, tetapi validitas pembuktian tetap diletakkan pada manipulasi simbolik. Dengan demikian, visualisasi berfungsi sebagai jembatan menuju pembuktian formal.

Analisis lintas kasus menunjukkan bahwa strategi ini muncul pada mahasiswa yang memiliki kepercayaan kuat terhadap pembuktian simbolik. Meskipun mampu memahami informasi visual yang tersedia, mereka tetap merasa perlu mengubah hubungan geometris ke dalam bentuk persamaan sebelum menerima suatu argumen sebagai bukti yang sah.

Manipulasi Geometri

Strategi manipulasi geometri ditemukan pada subjek S6. Berbeda dengan kategori sebelumnya, strategi ini ditandai oleh dominasi aktivitas visual-spasial dalam membangun argumen matematis. Mahasiswa tidak segera menerjemahkan gambar ke dalam bentuk aljabar, tetapi menggunakan transformasi dan pengorganisasian ulang bangun geometris untuk memperoleh hubungan yang mendukung Teorema Pythagoras.

Pada tahap awal, S4, S6 mengidentifikasi bahwa gambar terdiri atas empat segitiga siku-siku kongruen yang membentuk sebuah persegi besar. Perhatian utama subjek tertuju pada hubungan luas antara bangun utama dan bangun-bangun penyusunnya.



Hasil pekerjaan menunjukkan bahwa S6 membandingkan luas persegi besar dengan jumlah luas empat segitiga siku-siku dan persegi kecil yang terbentuk di bagian tengah. Melalui perbandingan tersebut, S6 memperoleh hubungan yang secara langsung mengarah pada Teorema Pythagoras. Hasil wawancara menunjukkan proses berpikir yang berbeda dibandingkan kategori sebelumnya.

Peneliti: Apa yang pertama kali Anda pikirkan ketika melihat gambar?
S6: Saya melihat bentuk perseginya terlebih dahulu.
Peneliti: Mengapa tidak langsung membuat persamaan?
S6: Karena saya merasa hubungan luasnya sudah terlihat dari susunan gambarnya.
Peneliti: Jadi gambar membantu pembuktian?
S6: Ya, saya lebih memahami dari bentuknya daripada dari rumus.

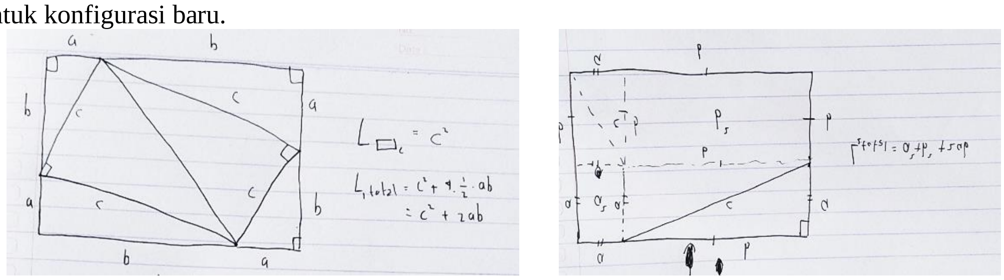
Wawancara tersebut menunjukkan bahwa mahasiswa lebih mengandalkan relasi spasial daripada manipulasi simbolik dalam membangun argumen matematis.

Strategi ini menunjukkan dominasi penalaran visual-spasial. Hubungan matematis diperoleh melalui pengamatan terhadap struktur geometris dan transformasi bentuk yang dilakukan. Berbeda dengan strategi translasi visual ke aljabar, legitimasi pembuktian tidak sepenuhnya bergantung pada simbol, tetapi pada kesetaraan geometris yang diamati secara visual.

Rekonstruksi Geometris

Strategi rekonstruksi geometris ditemukan pada subjek S1 dan merupakan bentuk pemanfaatan representasi visual yang paling kompleks. Karakteristik utamanya adalah adanya aktivitas membangun kembali atau mereorganisasi representasi visual untuk menghasilkan konfigurasi yang lebih informatif.

S1 tidak menggunakan gambar yang tersedia secara langsung. Sebaliknya, subjek melakukan restrukturisasi terhadap bangun yang diberikan dengan menggambar ulang beberapa bagian sehingga terbentuk konfigurasi baru.



Gambar 4. Hasil pekerjaan S1

Gambar 4 menunjukkan bahwa S1 menyusun ulang posisi segitiga dan persegi sehingga hubungan luas yang sebelumnya tidak terlihat menjadi lebih jelas. Melalui konfigurasi baru tersebut, S1 membangun argumen mengenai kesetaraan luas yang mengarah pada hubungan $a^2 + b^2 = c^2$. Proses ini diperjelas melalui wawancara berikut.

Peneliti: Mengapa Anda menggambar ulang bangunnya?
S1: Karena saya belum melihat hubungan luasnya pada gambar awal.
Peneliti: Apa yang berubah setelah digambar ulang?
S1: Setelah beberapa bagian dipindah, saya bisa melihat bahwa luasnya sebenarnya tetap sama.
Peneliti: Jadi gambar baru membantu pembuktian?
S1: Ya, karena hubungan antarbangunnya menjadi lebih jelas.

Strategi ini menunjukkan adanya proses restrukturisasi visual yang lebih mendalam dibandingkan dua kategori sebelumnya. Mahasiswa tidak hanya menggunakan gambar sebagai sumber informasi, tetapi secara aktif membangun representasi baru yang dianggap lebih sesuai untuk mengembangkan argumen matematis.

Aktivitas tersebut menunjukkan kemampuan dekomposisi dan rekonstruksi visual yang tinggi. Melalui proses ini mahasiswa mampu mengidentifikasi hubungan matematis yang sebelumnya tidak tampak pada konfigurasi awal.

Konstruksi Bukti *(Proof Construction)*

Tahap konstruksi bukti merupakan fase inti dalam proses pembuktian tanpa kata. Setelah mahasiswa menentukan strategi yang akan digunakan pada tahap pembenaran operasi, mereka mulai membangun argumen matematis yang menghubungkan informasi visual dengan hipotesis yang akan dibuktikan. Pada tahap ini representasi visual tidak lagi hanya berfungsi sebagai objek pengamatan, tetapi menjadi sumber utama dalam pembentukan hubungan matematis yang mendukung kesimpulan.

Analisis lintas kasus menunjukkan bahwa seluruh subjek melakukan aktivitas konstruksi bukti, meskipun melalui mekanisme yang berbeda. Perbedaan tersebut ditentukan oleh strategi yang dipilih pada tahap sebelumnya.

Pada kelompok translasi visual ke aljabar (S2, S3, dan S5), konstruksi bukti dilakukan dengan mengubah hubungan visual menjadi ekspresi simbolik. Mahasiswa menghitung luas bangun menggunakan dua representasi yang berbeda, kemudian membangun persamaan yang menghubungkan kedua hasil tersebut. Aktivitas konstruksi bukti pada kelompok ini ditandai oleh proses transformasi representasi dari visual menuju simbolik.

Sebagai contoh, S2 membandingkan luas trapesium yang dihitung menggunakan rumus luas trapesium dengan luas yang diperoleh melalui penjumlahan bangun-bangun penyusunnya. Kesetaraan kedua representasi tersebut digunakan untuk membentuk hubungan matematis yang mengarah pada Teorema Pythagoras.

Peneliti: Setelah memperoleh dua cara menghitung luas, apa yang Anda lakukan?

S2: Saya menyamakan hasilnya karena luas bangunnya sama. Dari situ muncul persamaan yang bisa disederhanakan sampai mendapatkan hubungan antara a, b, dan c.

Sementara itu, pada strategi manipulasi geometri yang ditunjukkan oleh S6, konstruksi bukti dilakukan melalui transformasi geometris dan pengamatan terhadap kesetaraan luas. Mahasiswa tidak bergantung pada manipulasi simbolik yang panjang, melainkan membangun argumen melalui hubungan spasial yang muncul dari susunan bangun.

Peneliti: Bagaimana Anda mengetahui bahwa hubungan luas tersebut benar?

S6: Karena bagian-bagiannya hanya dipindahkan posisinya. Luas keseluruhannya tidak berubah walaupun bentuk susunannya berbeda.

Berbeda dengan kedua strategi sebelumnya, pada strategi rekonstruksi geometris yang ditunjukkan oleh S1, konstruksi bukti ditandai oleh aktivitas restrukturisasi representasi visual. Mahasiswa membangun konfigurasi baru yang dianggap lebih mampu memperlihatkan hubungan matematis yang tersembunyi pada gambar awal.

Peneliti: Mengapa Anda menggambar ulang bangun tersebut?

S1: Karena hubungan luasnya belum terlihat pada gambar pertama. Setelah saya susun ulang, hubungan antarbangunnya menjadi lebih jelas.

Temuan ini menunjukkan bahwa konstruksi bukti dalam pembuktian tanpa kata tidak berlangsung secara seragam. Meskipun seluruh mahasiswa berusaha membangun hubungan yang mengarah pada Teorema Pythagoras, mekanisme konstruksi yang digunakan berbeda-beda, mulai dari transformasi visual ke simbolik, manipulasi geometris, hingga restrukturisasi representasi visual. Dengan demikian, tahap konstruksi bukti menjadi fase yang memperlihatkan secara nyata bagaimana mahasiswa memanfaatkan representasi visual untuk membangun argumen matematis.

Dari perspektif Boero, tahap ini berkaitan dengan fase *production of arguments* dan *organization of arguments*, yaitu ketika mahasiswa mulai mengembangkan dan mengorganisasikan hubungan matematis yang mendukung konjektur awal. Pada tahap inilah argumen pembuktian mulai terbentuk secara eksplisit.

Validasi Kesimpulan *(Validation)*

Tahap validasi kesimpulan merupakan fase akhir dalam proses pembuktian tanpa kata. Setelah membangun argumen matematis, mahasiswa melakukan pemeriksaan terhadap hubungan yang diperoleh untuk memastikan bahwa hasil tersebut konsisten dengan hipotesis awal. Analisis menunjukkan bahwa seluruh subjek melakukan aktivitas validasi, meskipun bentuk validasi yang digunakan berbeda sesuai dengan strategi pembuktian yang dipilih.

Pada kelompok translasi visual ke aljabar, validasi dilakukan melalui pemeriksaan konsistensi manipulasi simbolik. Mahasiswa menerima hasil pembuktian setelah memperoleh bentuk akhir yang sesuai dengan hubungan Teorema Pythagoras.

Peneliti: Kapan Anda yakin bahwa pembuktian yang dibuat sudah benar?
S3: Ketika hasil akhirnya menjadi a² ditambah b² sama dengan c². Saya cek lagi langkah-langkah aljabarnya dan tidak menemukan kesalahan.

Temuan tersebut menunjukkan bahwa legitimasi pembuktian pada kelompok ini terutama ditentukan oleh konsistensi prosedur simbolik.

Pada strategi manipulasi geometri, validasi dilakukan melalui pemeriksaan kesetaraan luas dan hubungan spasial antarbangun. Mahasiswa tidak terlalu bergantung pada verifikasi simbolik, tetapi lebih menekankan pada kestabilan hubungan geometris yang diamati.
Peneliti: Bagaimana Anda memastikan bahwa pembuktian tersebut benar?
S6: Karena luas bangunnya tetap sama. Bagian-bagiannya hanya berubah posisi, jadi hubungan luasnya juga tetap.

Sementara itu, pada strategi rekonstruksi geometris, validasi dilakukan dengan membandingkan konfigurasi awal dan konfigurasi hasil rekonstruksi. Mahasiswa memastikan bahwa perubahan susunan bangun tidak mengubah luas total maupun hubungan matematis yang terdapat di dalamnya.
Peneliti: Apa yang membuat Anda yakin gambar yang baru tetap mewakili bangun yang sama?
S1: Karena semua bagian yang digunakan sama, hanya letaknya yang berbeda. Jadi luasnya tetap dan hubungan yang muncul juga tetap berlaku.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa validasi dalam pembuktian tanpa kata tidak selalu berbentuk pemeriksaan formal terhadap langkah-langkah deduktif. Pada beberapa kasus, validasi dilakukan melalui pengujian konsistensi visual dan kesetaraan geometris. Temuan ini mengindikasikan bahwa representasi visual tidak hanya berperan dalam membangun argumen, tetapi juga berfungsi sebagai dasar evaluasi terhadap kebenaran argumen yang telah dibangun.

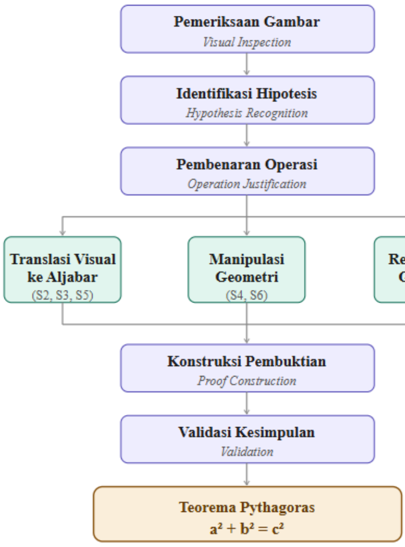
Jika ditinjau dari perspektif Boero, tahap ini berkaitan dengan fase *proof validation*, yaitu proses evaluasi terhadap keabsahan argumen yang dihasilkan. Sementara itu, dalam kerangka Heinze dan Reiss, tahap validasi menunjukkan peralihan dari aktivitas eksplorasi menuju aktivitas justifikasi, ketika mahasiswa mulai menilai apakah hubungan matematis yang diperoleh telah memenuhi kriteria sebagai suatu pembuktian.

Secara keseluruhan, temuan pada tahap validasi menunjukkan bahwa mahasiswa tidak menerima hasil pembuktian secara langsung setelah memperoleh hubungan matematis tertentu. Sebaliknya, mereka melakukan pemeriksaan ulang terhadap hubungan tersebut melalui mekanisme yang berbeda sesuai dengan strategi yang digunakan. Oleh karena itu, validasi kesimpulan menjadi komponen penting yang memastikan bahwa proses pembuktian tanpa kata tidak berhenti pada pembentukan argumen, tetapi berlanjut hingga pada penerimaan argumen sebagai bukti yang sah.

3.2. Pembahasan

Temuan utama penelitian ini adalah teridentifikasinya model proses pembuktian tanpa kata yang terdiri atas lima tahapan utama, yaitu pemeriksaan gambar (*visual inspection*), identifikasi hipotesis (*hypothesis recognition*), pembenaran operasi (*operation justification*), konstruksi pembuktian (*proof construction*), dan validasi kesimpulan (*validation*). Model ini menunjukkan bahwa pembuktian visual tidak berlangsung secara spontan melalui pengamatan gambar semata, tetapi merupakan proses kognitif yang terstruktur dan melibatkan serangkaian aktivitas penalaran yang saling berkaitan. Selain pola umum tersebut, ditemukan tiga strategi pembuktian visual yang berbeda, yaitu translasi visual ke aljabar, manipulasi geometri, dan rekonstruksi geometris. Ketiga strategi tersebut muncul pada tahap pembenaran operasi dan menentukan jalur pembuktian yang dipilih mahasiswa. Model tersebut disajikan pada Gambar 1.

ISSN. 2621-9832
JURNAL MathEdu (Mathematic Education Journal)
http://journal.ipts.ac.id/index.php/MathEdu
Vol. 9 . No. 2 Juli 2026



Gambar 1. Model Proses Pembuktian Tanpa Kata Mahasiswa pada Teorema Pythagoras

Hasil ini memperkuat pandangan bahwa pembuktian matematika pada dasarnya merupakan aktivitas konstruksi pengetahuan yang melibatkan pembentukan konjektur, pengembangan argumen, dan validasi secara berkelanjutan (Mejía-Ramos & Inglis, 2009; Stylianides dkk., 2024a). Dalam konteks pembuktian tanpa kata, representasi visual tidak berfungsi sebagai bukti yang telah selesai, melainkan sebagai sumber informasi yang harus diinterpretasikan, diorganisasikan, dan dijustifikasi sebelum diterima sebagai argumen matematis yang sah.

Fase pertama, yaitu pemeriksaan gambar (*visual inspection*), menunjukkan bahwa aktivitas awal mahasiswa tidak langsung mengarah pada pembuktian, tetapi pada eksplorasi struktur visual yang tersedia. Pada tahap ini mahasiswa mengidentifikasi komponen geometris, hubungan spasial, kesimetrian, serta kemungkinan transformasi yang dapat dilakukan terhadap bangun. Temuan ini sejalan dengan teori visualisasi matematis yang menyatakan bahwa representasi visual berfungsi sebagai sarana eksplorasi awal untuk membangun pemahaman terhadap struktur matematis yang mendasarinya (Arcavi, 2003; Presmeg, 2006). Dalam perspektif (Duval, 2014), tahap ini dapat dipahami sebagai proses pengenalan register representasi sebelum individu melakukan transformasi representasional yang lebih kompleks.

Tahap kedua, yaitu identifikasi hipotesis (*hypothesis recognition*), menunjukkan bagaimana mahasiswa mulai menghubungkan pola visual yang diamati dengan konsep matematis yang telah dimiliki sebelumnya. Pada fase ini mahasiswa membangun dugaan mengenai hubungan antara sisi-sisi segitiga siku-siku yang mengarah pada Teorema Pythagoras. Temuan tersebut mendukung pandangan bahwa pembentukan konjektur merupakan fondasi utama dalam aktivitas pembuktian matematis (Boero, 1990; Weber & Ramos, 2019). Dengan demikian, gambar berfungsi sebagai pemicu munculnya hipotesis matematis, bukan sebagai bukti itu sendiri.

Tahap ketiga, yaitu pembenaran operasi (*operation justification*), merupakan fase yang belum banyak dijelaskan dalam model pembuktian sebelumnya. Pada tahap ini mahasiswa menentukan tindakan matematis yang dianggap paling tepat untuk menghubungkan representasi visual dengan hipotesis yang akan dibuktikan. Temuan ini menunjukkan bahwa sebelum membangun bukti, mahasiswa terlebih dahulu melakukan evaluasi terhadap kemungkinan operasi yang tersedia. Aktivitas tersebut menunjukkan adanya proses metakognitif berupa pemilihan strategi yang diyakini mampu menghasilkan argumen yang valid. Penelitian terbaru mengenai proof construction menunjukkan bahwa keberhasilan pembuktian sering kali ditentukan oleh kemampuan memilih strategi yang sesuai sebelum proses argumentasi dimulai (Weber & Czocher, 2019).

Tahap keempat, yaitu konstruksi pembuktian (*proof construction*), merupakan inti dari keseluruhan proses. Pada fase ini mahasiswa mulai membangun hubungan matematis yang mendukung hipotesis awal. Temuan penelitian menunjukkan bahwa konstruksi bukti dapat berlangsung melalui berbagai mekanisme, mulai dari transformasi visual ke simbolik, manipulasi geometris, hingga restrukturisasi representasi visual. Hasil ini sejalan dengan penelitian yang menunjukkan bahwa pembuktian matematika merupakan aktivitas representasional yang melibatkan koordinasi berbagai bentuk representasi matematis (Arzarello dkk., 2012; Stylianides dkk., 2024a).

Tahap terakhir, yaitu validasi kesimpulan (validation), menunjukkan bahwa mahasiswa tidak menerima hasil pembuktian secara langsung setelah memperoleh hubungan matematis tertentu. Sebaliknya, mereka melakukan pemeriksaan ulang terhadap konsistensi argumen yang dibangun. Menariknya, validasi tidak selalu dilakukan melalui deduksi simbolik, tetapi juga melalui pemeriksaan kesetaraan luas, kestabilan hubungan spasial, dan konsistensi konfigurasi visual. Temuan ini mendukung penelitian mutakhir yang menunjukkan bahwa validasi matematis dapat berlangsung melalui berbagai bentuk justifikasi yang bergantung pada representasi yang digunakan selama proses pembuktian (Stylianides dkk., 2024a; Weber & Alcock, 2004).

Secara keseluruhan, model lima fase yang dihasilkan memperluas kerangka pembuktian (Boero, 1990). Jika Boero menekankan produksi konjektur, produksi argumen, organisasi argumen, dan validasi, penelitian ini menunjukkan bahwa dalam konteks pembuktian tanpa kata terdapat fase eksplorasi visual dan pembenaran operasi yang memainkan peran penting sebelum argumen matematis terbentuk. Dengan demikian, model ini memberikan penjelasan yang lebih rinci mengenai mekanisme kognitif yang mendasari pembentukan bukti visual.

Selain mengidentifikasi struktur proses pembuktian, penelitian ini juga menemukan tiga strategi utama yang digunakan mahasiswa dalam membangun bukti visual, yaitu translasi visual ke aljabar, manipulasi geometri, dan rekonstruksi geometris. Ketiga strategi tersebut menunjukkan bahwa representasi visual dapat dimanfaatkan dengan cara yang berbeda meskipun tujuan pembuktiannya sama.

Strategi translasi visual ke aljabar menunjukkan kecenderungan mahasiswa untuk menjadikan simbol sebagai sumber legitimasi utama dalam pembuktian matematis. Pada strategi ini gambar berfungsi sebagai sarana memperoleh informasi yang kemudian diterjemahkan ke dalam bentuk persamaan matematis. Temuan ini mendukung teori representasi semiotik yang menyatakan bahwa pemahaman matematis sering berkembang melalui proses konversi dari representasi visual menuju representasi simbolik (Duval, 2014). Mahasiswa dalam kategori ini belum sepenuhnya mempercayai visualisasi sebagai argumen matematis yang berdiri sendiri, sehingga validitas pembuktian tetap diletakkan pada manipulasi simbolik.

Berbeda dengan kategori tersebut, strategi manipulasi geometri menunjukkan dominasi penalaran visual-spasial. Mahasiswa memperoleh hubungan matematis melalui transformasi bangun dan pengamatan terhadap kesetaraan luas. Dalam strategi ini, gambar tidak hanya berfungsi sebagai sumber informasi, tetapi juga sebagai medium argumentasi. Temuan ini sejalan dengan penelitian yang menunjukkan bahwa visualisasi dapat berfungsi sebagai alat epistemik yang memungkinkan individu membangun dan memvalidasi pengetahuan matematis secara langsung melalui hubungan geometris yang diamati (Arzarello dkk., 2012).

Strategi yang paling kompleks adalah rekonstruksi geometris. Pada kategori ini mahasiswa tidak menerima konfigurasi visual yang tersedia sebagai representasi final, tetapi secara aktif membangun kembali struktur visual yang dianggap lebih informatif. Aktivitas restrukturisasi tersebut menunjukkan adanya fleksibilitas representasional yang tinggi serta kemampuan untuk melihat hubungan matematis dari berbagai perspektif. Temuan ini sejalan dengan penelitian mengenai mathematical sense-making yang menekankan pentingnya kemampuan membangun dan memodifikasi representasi dalam proses pembuktian (Weber & Czocher, 2019). Dengan demikian, rekonstruksi geometris dapat dipandang sebagai bentuk penalaran visual tingkat tinggi karena melibatkan eksplorasi, produksi representasi, argumentasi, dan validasi secara simultan.

Kontribusi utama penelitian ini terletak pada pengembangan model proses pembuktian tanpa kata yang menjelaskan bagaimana mahasiswa membangun bukti matematis melalui representasi visual. Berbeda dengan sebagian besar penelitian sebelumnya yang berfokus pada efektivitas penggunaan pembuktian tanpa kata atau kualitas bukti yang dihasilkan mahasiswa, penelitian ini mengungkap mekanisme kognitif yang mendasari proses terbentuknya bukti visual.

Model yang dihasilkan menunjukkan bahwa variasi strategi pembuktian tidak mengubah struktur dasar proses pembuktian. Seluruh mahasiswa tetap melalui lima fase yang sama, tetapi menempuh jalur yang berbeda pada tahap pembenaran operasi, konstruksi pembuktian, dan validasi kesimpulan. Temuan ini mengindikasikan bahwa keragaman pembuktian matematis tidak terletak pada urutan proses yang dilalui, melainkan pada bentuk aktivitas kognitif yang muncul dalam setiap fase.

Secara teoretis, penelitian ini memperluas kerangka (Boero, 1990) dan melengkapi perspektif kompetensi pembuktian yang dikembangkan (Heinze & Reiss, 2004). Hasil penelitian menunjukkan bahwa visualisasi tidak hanya berfungsi sebagai alat bantu pembelajaran, tetapi dapat berperan sebagai sumber konjektur, medium argumentasi, sekaligus mekanisme validasi. Oleh karena itu, pembuktian tanpa kata dapat dipahami sebagai lingkungan kognitif yang memungkinkan mahasiswa membangun, mengembangkan, dan memvalidasi argumen matematis melalui berbagai jalur representasional yang berbeda.

Implikasi dari temuan ini adalah perlunya pembelajaran pembuktian matematika yang tidak hanya berorientasi pada manipulasi simbolik, tetapi juga memberikan ruang bagi eksplorasi visual, transformasi geometris, dan rekonstruksi representasi sebagai bagian integral dari aktivitas pembuktian. Dengan demikian, pengembangan kemampuan pembuktian dapat berlangsung secara lebih fleksibel dan lebih dekat dengan praktik penalaran matematis yang autentik.

4. KESIMPULAN

Penelitian ini mengungkap bahwa proses pembuktian tanpa kata yang dilakukan mahasiswa dalam membuktikan Teorema Pythagoras tidak berlangsung secara intuitif atau hanya berdasarkan pengamatan visual semata. Sebaliknya, pembuktian berkembang melalui serangkaian aktivitas kognitif yang sistematis yang terdiri atas lima fase utama, yaitu pemeriksaan gambar, identifikasi hipotesis, pembenaran operasi, konstruksi bukti, dan validasi kesimpulan. Kelima fase tersebut menunjukkan bahwa representasi visual tidak hanya berfungsi sebagai alat ilustrasi, tetapi berperan sebagai sarana untuk membangun, mengembangkan, dan memvalidasi argumen matematis.

Penelitian ini juga menemukan tiga strategi pembuktian visual yang berbeda, yaitu translasi visual ke aljabar, manipulasi geometri, dan rekonstruksi geometris. Strategi translasi visual ke aljabar ditandai oleh konversi representasi visual ke bentuk simbolik sebagai dasar validasi bukti. Strategi manipulasi geometri memanfaatkan transformasi bangun dan kesetaraan luas sebagai sarana argumentasi matematis. Sementara itu, strategi rekonstruksi geometris menunjukkan tingkat pemanfaatan visualisasi yang paling tinggi melalui aktivitas restrukturisasi dan pembentukan representasi baru untuk mengungkap hubungan matematis yang tersembunyi.

Kontribusi utama penelitian ini adalah pengembangan model proses pembuktian tanpa kata yang menjelaskan bagaimana mahasiswa membangun bukti matematis dari representasi visual melalui jalur-jalur strategi yang berbeda tetapi tetap mengikuti struktur proses yang relatif sama. Model ini memperluas pemahaman tentang pembuktian matematis dengan menunjukkan bahwa visualisasi dapat berfungsi tidak hanya sebagai pendukung argumentasi formal, tetapi juga sebagai medium utama dalam pembentukan dan validasi argumen matematis.

Temuan penelitian memberikan implikasi bahwa pembelajaran pembuktian matematika perlu memberikan ruang yang lebih luas bagi eksplorasi representasi visual, transformasi geometris, dan aktivitas rekonstruksi visual sebagai bagian integral dari proses pembuktian. Dengan demikian, pengembangan kemampuan pembuktian tidak hanya berorientasi pada manipulasi simbolik, tetapi juga pada kemampuan mahasiswa dalam memanfaatkan berbagai representasi untuk membangun justifikasi matematis yang bermakna.

5. REFERENSI

Alcock, L., & Inglis, M. (2010). Visual Considerations in the Presentation of Mathematical Proofs. *Seminar.net*, *6*(1). https://doi.org/10.7577/seminar.2457

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2010). An invitation to proofs without words. *Europen Journal of Pure And Applied Mathematics*, *3*(1), 118–127.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215–241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Arzarello, F., Bussi, M. G. B., Leung, A. Y. L., Mariotti, M. A., & Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs. Dalam G. Hanna & M. de Villiers (Ed.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (hlm. 97–143). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_5

Boero, P. (1990). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*, *7*(8).

Cain, A. J. (2019). Visual thinking and simplicity of proof. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *377*(2140), 20180032. https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0032

Dogan, M. F. (2022). Pre-Service Teachers' Criteria for Evaluating Mathematical Arguments That Include Generic Examples. *International Journal of Contemporary Educational Research*, *7*(1), 267–279. https://doi.org/10.33200/ijcer.721136

Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM*, *46*(1), 159–170. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0565-8

Hanna, G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. Dalam *Encyclopedia of Mathematics Education* (hlm. 561–566). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_102

Hanna, G., & De Villiers, M. (Ed.). (2021). *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (Vol. 15). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6

Häsä, J., Westlin, L., & Rämö, J. (2023). Undergraduate students' attitudes towards mathematical proving in an introduction to proof course. *Educational Studies in Mathematics*, *114*(3), 393–415. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10239-8

Heinze, A., & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level—A video study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *36*(3), 98–104. https://doi.org/10.1007/BF02652777

İnam, B., Ugurel, İ., & Boz Yaman, B. B. Y. (2018). High School Students' Performances on Proof Comprehension Tests. *International Journal of Assessment Tools in Education*, *5*(2), 339–369. https://doi.org/10.21449/ijate.416261

Kirsten, K., & Greefrath, G. (2023). Proof construction and in-process validation – Validation activities of undergraduates in constructing mathematical proofs. *The Journal of Mathematical Behavior*, *70*, 101064. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101064

Marco, N., Palatnik, A., & Schwarz, B. B. (2022). *Redesigning Proofs Without Words for secondary level mathematics Transformative Learning of Mathematics Teachers View project*. https://www.researchgate.net/publication/358891743

Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education*, *2*, 124–129.

Miller, D., Infante, N., & Weber, K. (2018). How mathematicians assign points to student proofs. *The Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 24–34. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.002

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. Dalam A. Gutiérrez & P. Boero (Ed.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (hlm. 205–235). Sense Publishers.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024a). Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(1), 47–59. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024b). Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(1), 47–59. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and Syntactic Proof Productions. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(3), 209–234. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000040410.57253.a1

Weber, K., & Czocher, J. (2019). On mathematicians' disagreements on what constitutes a proof. *Research in Mathematics Education*, *21*(3), 251–270. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1585936

Weber, K., & Ramos, J. P. M. (2019). An Empirical Study on the Admissibility of Graphical Inferences in Mathematical Proofs. Dalam A. Aberdein & M. Inglis (Ed.), *Advances in Experimental Philosophy of Logic and Mathematics* (hlm. 123–144). Bloomsbury Academic.